

ПОВЕРХНОСТИ В КОММУТАТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИИ 3-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ГАЛИЛЕЯ

Аннотация. Изучаются поверхности одного из 3-мерных пространств Галилея с коммутативной и нелинейной геометрией. Линейное пространство определено на тройках действительных чисел, в компонентах троек операции заданы нелинейными функциями. Для векторов введено галилеево скалярное произведение. Получены формулы дифференцирования векторных функций. В аксиоматике Г. Вейля на основе указанного линейного пространства строится пространство-время Галилея. Уравнения прямых и плоскостей полученного пространства нелинейны. Определены регулярные поверхности, ее первая и вторая квадратичные формы, нормальная кривизна поверхности, полная и средняя кривизны. Проведена классификация обыкновенных точек поверхностей. Вычислена полная кривизна некоторых поверхностей.

Ключевые слова: нелинейная коммутативная геометрия Галилея, кривизна поверхности.

Abstract. For vectors determine not linear and commutative operation and Galilean inner product of vector. Formulas to differentiate vector functions are obtained. Equations straight line and plane to be not linear. Obtained normal, middle and complete curvature surface. Have a examples.

Keyword: not linear and commutative geometry of Galilei, curvature surface.

Геометрической основой физического принципа относительности Галилея является галилеева геометрия. Известны разнообразные геометрические системы и еще предстоит выяснить, какая из них лучше соответствует реальной картине окружающего мира. Галилеевы геометрии строятся в аксиоматике Г. Вейля с использованием линейного пространства и его обобщения – одуля Ли. Коммутативная и линейная геометрия Галилея 3-мерного пространства-времени Γ^3 [1] базируется на арифметическом пространстве $\mathbf{R}^3$, где $\mathbf{R}$ – поле действительных чисел с операциями

$$(x, x^1, x^2) + (y, y^1, y^2) = (x + y, x^1 + y^1, x^2 + y^2);$$

$$u(x, x^1, x^2) = (xu, x^1u, x^2u), \quad u \in \mathbf{R},$$

на котором введено галилеево скалярное произведение векторов. Галилеевым скалярным произведением векторов $\vec{p} = (x, x^1, x^2)$, $\vec{q} = (y, y^1, y^2)$ называется [1, с.46]

$$\vec{p}\vec{q} = \begin{cases} xy, & \text{если } x \neq 0 \text{ или } y \neq 0; \\ x^1y^1 + x^2y^2, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Пространство $\mathbf{R}^3$ с указанным скалярным произведением векторов называется галилеевым векторным пространством и обозначается $\mathbf{V}_\Gamma^3$. Первая

компонента векторов называется временной, оставшиеся компоненты называются пространственными. Векторное пространство V_Γ^3 является прямой суммой евклидовых пространств: $V_\Gamma^3 = V^1 + V^2$, для сравнения см. [2, с. 11–18]. Геометрия коммутативного и линейного пространства-времени Галилея Γ^3 изучается в [1, с. 46–101]. Имеется несколько некоммутативных галилеевых геометрий, это одулярные геометрии. 3-мерный одуль Ли задается операциями на многообразии $\mathbf{R}^3$. Один из этих одулей Ли – сибсон Σ^3 – определяется операциями [1, с. 107]

$$(x, x^1, x^2) + (y, y^1, y^2) = (x + y, x^1 + y^1, x^2 + y^2 + x^1 y);$$

$$u(x, x^1, x^2) = \left(xu, x^1 u, x^2 u + x x^1 \frac{(u-1)u}{2} \right), \quad u \in \mathbf{R}.$$

Для элементов сибсона определено скалярное произведение, как для векторов из V_Γ^3 . Соответствующая геометрия изложена в [1].

В работах [3, 4] начато построение 2-мерного аффинного пространства, линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ которого задано на многообразии $\mathbf{R}^2$ операциями

$$(x, u) + (y, v) = (x + y, u + v + xy); \quad t(x, u) = \left(xt, ut + x^2 \frac{(t-1)t}{2} \right), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Операции над векторами определены нелинейными функциями. Для приведенных операций выполнены все аксиомы линейного пространства [3]. Линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ порождается векторами вида $(x, 0)$ и в прямую сумму 1-мерных линейных пространств не разлагается.

Ниже мы распространим операции над векторами пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ на тройки из $\mathbf{R}^3$, используя аналогию с операциями на сибсоне. Введем на 3-мерном линейном пространстве ${}^a\mathbf{L}_1^3$ с нелинейными функциями операций галилеево скалярное произведение векторов и получим некоторые факты нелинейной и коммутативной геометрии Галилея.

1 Пространство Галилея с нелинейной коммутативной геометрией

1.1 Галилеево векторное пространство с нелинейными операциями

На многообразии $\mathbf{R}^3$ зададим операции

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v + xu, z + w); \quad (1)$$

$$t(x, y, z) = \left(xt, yt + x^2 + \frac{(t-1)t}{2}, zt \right), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Результаты операций в третьей компоненте троек из $\mathbf{R}^3$ не влияют на результаты операции в первой и второй компонентах. Поэтому можно воспользоваться свойствами операций векторов из ${}^a\mathbf{L}^2$ [3]; на основании чего получаем следующее утверждение.

Лемма 1. Многообразие $\mathbf{R}^3$ с операциями (1) и (2) является действительным линейным пространством. #

Полученное линейное пространство обозначается ${}^a\mathbf{L}_1^3$, его векторы обозначаются $\alpha, \beta, \dots$; нулевой вектор есть $\vartheta = (0, 0, 0)$; вектор, противоположный вектору $v = (x, y, z)$, равен $-v = (-x, -y + x^2, -z)$. Если

$$\alpha = (1, 0, 0), \beta = (0, 1, 0), \gamma = (0, 0, 1),$$

то для вектора v имеется однозначное разложение [3]

$$v = (x, y, z) = x\alpha + \left(y - \frac{(x-1)x}{2} \right) \beta + z\gamma,$$

и векторы α, β, γ составляют базис $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$ линейного пространства ${}^a\mathbf{L}_1^3$. На основании операций (1), (2) справедлива

Лемма 2. Линейное пространство ${}^a\mathbf{L}_1^3$ является прямой суммой 2-мерного линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ и 1-мерного линейного пространства $\mathbf{L}^1$:

$${}^a\mathbf{L}_1^3 = {}^a\mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^1;$$

линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ состоит из векторов $(x, y, 0)$ и порождается векторами $(x, 0, 0)$ (но не вектором $(1, 0, 0) = \alpha$) линейное пространство $\mathbf{L}^1$ состоит из векторов $(0, 0, z)$ и порождается вектором γ : $\mathbf{L}^1 = \langle \gamma \rangle$. #

Галилеевым скалярным произведением векторов v и $\mu = (u, v, w)$ называется число

$$v\mu = \begin{cases} xu, & \text{если } x \neq 0 \text{ или } u \neq 0; \\ yv + zw, & \text{если } x = u = 0. \end{cases}$$

Галилеев скалярный квадрат вектора v равен

$$v^2 = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0; \\ y^2 + z^2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Галилеевой нормой вектора v называется $|v| = \sqrt{v^2}$, имеем

$$|v| = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \neq 0; \\ \sqrt{y^2 + z^2}, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Компонента x вектора v называется временной, компоненты y, z называются пространственными. Векторы $(0, y, z)$ называются евклидовыми, для них используются обозначения $\vec{r} = (0, y, z)$, а векторы $v = (x, y, z)$, $x \neq 0$, называются галилеевыми. Для евклидовых векторов используются также обозначения $\vec{a}, \vec{r}, \dots$. Всякий Галилеев вектор перпендикулярен всякому евклидову вектору, т.к. $\vec{r}v = 0$, если $\vec{r} = (0, y, z)$.

Векторное пространство с галилеевым скалярным произведением векторов называется галилеевым векторным пространством и в нашем случае обозначается ${}^aV_{\Gamma}^3$, оно является прямой суммой 2-мерного галилеева векторного пространства V_{Γ}^2 и 1-мерного временного векторного пространства V^1 :

$${}^aV_{\Gamma}^3 = V_{\Gamma}^2 + V^1,$$

V_{Γ}^2 состоит из векторов $(x, y, 0)$, V^1 состоит из векторов $(0, 0, z)$. Базис $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$ пространства ${}^aV_{\Gamma}^3$ является ортонормированным.

Упорядоченная тройка действительных функций $x(t), y(t), z(t)$ действительного параметра t с общей областью определения $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ называется векторной функцией, которая обозначается

$$v(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}.$$

Функция $v(t)$ принимает значения в галилеевом векторном пространстве ${}^aV_{\Gamma}^3$. Считаем, что компоненты $x(t), y(t), z(t)$ являются функциями класса C^3 , в связи с чем говорим, что $v(t)$ есть галилеева функция класса C^3 . Производной функцией $v'(t)$ функции $v(t)$ называется

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t),$$

где Δt – приращение параметра t ; $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ – приращение функции $v(t)$.

Теорема 1. Производная галилеевой векторной функции $v(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$, является следующей галилеевой векторной функцией:

$$v'(t) = \left(x'(t), y'(t) + x'(t) \left(\frac{1}{2} x'(t) - x(t) \right), z'(t) \right). \quad (4)$$

Так как $-v(t) = (-x(t), -y(t) + x^2(t), -z(t))$, см. п. 1.1, то, на основании сложения троек (1), получаем

$$\Delta v = (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t) - x(t)(x(t + \Delta t) - x(t)), z(t + \Delta t) - z(t)).$$

Далее, по формуле (2) с учетом обозначений $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$, $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$ имеем

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta v = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} - x(t) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta t} - 1 \right), \frac{\Delta z}{\Delta t} \right).$$

Предел галилеевой векторной функции вычисляется покомпонентно. Вычисления дают равенство (4). #

Проверка показывает, что правила дифференцирования функций со значениями в ${}^aV_{\Gamma}^3$ совпадают с правилами дифференцирования евклидовых векторных функций, т.е. справедливы следующие утверждения.

Свойство 1. Выполняются равенства:

а) $(v(t) + \mu(t))' = v'(t) + \mu'(t)$;

б) $(Cv(t))' = Cv'(t)$, где C – постоянный множитель;

в) если компоненты векторной функции $v(t)$ являются сложными функциями $x(u(t)), y(u(t)), z(u(t))$, то $v'_t(u(t)) = u'_t v'_u(u(t))$;

г) если $v = \text{const}$, то $(tv)' = v$. #

Свойство 2. Если одна из компонент векторной функции $v(t)$ постоянна, то формула дифференцирования (4) принимает один из видов:

$$(C, y(t), z(t))' = (0, y', z'); \quad (x(t), C, z(t))' = \left(x', x' \left(\frac{1}{2} x' - x \right), z' \right);$$

$$(x(t), y(t), C)' = \left(x', y' + x' \left(\frac{1}{2} x' - x \right), 0 \right);$$

если первая компонента функции $v(t)$ есть время $x(t) = t$, то

$$(t, y(t), z(t))' = \left(1, y' + \frac{1}{2} - t, z' \right),$$

и производная второго порядка галилеевой функции $v(t)$ является евклидовой (пространственной) функцией:

$$(t, y(t), z(t))'' = (0, y'' - 1, z''). \quad \#$$

С использованием теоремы 1 и свойства 2 получается

Теорема 2. Частные производные функции двух параметров $v(t, v)$ отыскиваются по тому же правилу, что и производные функции одного параметра:

$$\begin{aligned} v_v(t, v) &= (x(t, v), y(t, v), z(t, v))_v = \\ &= \left(x_v(t, v), y_v(t, v) + x_v(t, v) \left(\frac{1}{2} x_v(t, v) - x(t, v) \right), z_v(t, v) \right); \end{aligned}$$

смешанные производные второго порядка не зависят от порядка дифференцирования:

$$v_{tv}(t, v) = v_{vt}(t, v).$$

В частных случаях выполняются равенства

$$v_t(t, v) = (t, y(t, v), z(t, v))_t = \left(1, y_t(t, v) + \frac{1}{2} - t, z_v(t, v) \right);$$

$$v_v(t, v) = (t, y(t, v), z(t, v))_v = (0, y_v(t, v), z_v(t, v)). \quad \#$$

1.2 Пространство Галилея с векторным пространством ${}^a V_{\Pi}^3$

Пусть ${}^a \Gamma_1$ – непустое множество, элементы которого называются точками и обозначаются $A, B, \dots$, считаем, что дано галилеево векторное про-

пространство ${}^aV_{\Gamma}^3$ и отображение пар точек в ${}^aV_{\Gamma}^3$. Вектор, соответствующий паре точек (A, B) , обозначаем $\overline{AB}$. Выполняются аксиомы Г. Вейля.

1. Для всякой точки A и всякого вектора v существует единственная точка B такая, что $\overline{AB} = v$.

2. Для любых трех точек A, B, C , если $\overline{AB} = v$, $\overline{BC} = \mu$, то $\overline{AC} = v + \mu$.

Множество точек ${}^a\Gamma_1$, удовлетворяющее указанным условиям, называется пространством Галилея, ${}^aV_{\Gamma}^3$ называется векторным пространством пространства Галилея ${}^a\Gamma_1$. Размерность векторного пространства ${}^aV_{\Gamma}^3$ называется размерностью пространства Галилея, оно называется 3-мерным и обозначается в дальнейшем ${}^a\Gamma_1^3$. Векторы из ${}^aV_{\Gamma}^3$ называются векторами пространства ${}^a\Gamma_1^3$. Точка O из ${}^a\Gamma_1^3$ и базис $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$ галилеева векторного пространства ${}^aV_{\Gamma}^3$ составляют репер $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta, \gamma)$ пространства Галилея. Координаты вектора $\overline{OM}$ в базисе $\mathbf{B}$ называются координатами точки M в репере $\mathbf{B}$. Если $\overline{OM} = (x, y, z)$, то точка M имеет координаты x, y, z , обозначение $M(x, y, z)$. Согласно определению галилеевой нормы векторов в п. 1.1, первая координата точки является временной, вторая и третья координаты являются пространственными, и пространство ${}^a\Gamma_1^3$ называется пространством-временем Галилея, оно альтернативно классическому коммутативному пространству-времени Галилея Γ^3 , изучаемому в [1, с. 46–101]. Точки пространства-времени ${}^a\Gamma_1^3$ называются еще событиями. Изучаем пространство-время ${}^a\Gamma_1^3$ по аналогии с пространством Γ^3 .

Лемма 3. Пусть $A(a, g, h)$ и $B(b, c, d)$ – два события. Они определяют вектор

$$\overline{AB} = (b - a, c - g - a(b - a), d - h).$$

Для трех точек O, A, B по второй аксиоме Г. Вейля выполняется: $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$, откуда $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Как указано в п. 1.1, $-\overline{OA} = (-a, -g + a^2, -h)$, по (1) получаем координаты вектора $\overline{AB}$.

Теорема 3. Расстояние $|AB|$ между точками $A(a, g, h)$ и $B(b, c, d)$ равно

$$|AB| = \begin{cases} |b - a|, & \text{если } b \neq a; \\ \sqrt{(c - g)^2 + (d - h)^2}, & \text{если } b = a. \end{cases}$$

Расстояние $|AB|$ между точками A и B равно норме вектора $\overline{AB}$. По (3) и лемме 3 получаем указанное расстояние.

Это такое же галилеево расстояние между точками, как и в классическом пространстве Γ^3 [1]. События A и $M(x, y, z)$ называются одновременными, если $x = a$. Множество событий $M(a, y, z)$, одновременных с событи-

ем A , составляет в ${}^a\Gamma_1^3$ подпространство, являющееся евклидовой плоскостью. Через всякую точку пространства ${}^a\Gamma_1^3$ проходит единственная евклидова плоскость.

Прямая, порожденная точкой $A(a, g, h)$ и вектором $\mu = (m, p, q)$ и обозначаемая $\langle A, \mu \rangle$, является множеством точек

$$\langle A, \mu \rangle = \{M \mid \overline{AM} = t\mu, t \in \mathbf{R}\}.$$

Так определяется прямая аффинного пространства.

Теорема 4. *Параметрические уравнения прямой $\langle A, \mu \rangle$ таковы:*

$$x = mt + a, \quad y = (at + p)t + m^2 \frac{(t-1)t}{2} + g, \quad z = qt + h.$$

Уравнения получаются с использованием леммы 3, операции (2) над векторами и условия равенства векторов: векторы равны, если и только если равны их соответствующие координаты.

Если вектор μ галилеев, то уравнения прямой пространства ${}^a\Gamma_1^3$ нелинейны.

Следствие. *Уравнения прямой $\langle A, \mu \rangle$ линейны только в случае $m = 0$, т.е. в случае, если вектор прямой является евклидовым, уравнения прямой в этом случае*

$$x = a, \quad y = pt + g, \quad z = qt + h. \quad \#$$

Уравнения координатных осей таковы:

$$\begin{aligned} & \text{– ось } Ox = \langle O, \alpha \rangle: x = t, \quad y = \frac{(t-1)t}{2}, \quad z = 0; \\ & \text{– ось } Oy = \langle O, \beta \rangle: x = 0, \quad y = t, \quad z = 0; \\ & \text{– ось } Oz = \langle O, \gamma \rangle: x = 0, \quad y = 0, \quad z = t. \end{aligned}$$

Плоскость $\langle A, \mu, \nu \rangle$, порожденная точкой A и неколлинеарными векторами μ и $\nu = (n, r, s)$, есть, как и в аффинном пространстве, множество точек:

$$\langle A, \mu, \nu \rangle = \{M \mid \overline{AM} = u\mu + v\nu, (u, v) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Лемма 4. *В векторном подпространстве $\langle \mu, \nu \rangle$ пространства ${}^aV_{\Gamma}^3$, порожденном галилеевыми векторами μ, ν , содержатся и евклидовы векторы.*

Подпространство $\langle \mu, \nu \rangle$ содержит вектор $n\mu - mv$, являющийся евклидовым.

Поэтому вектор ν в задании плоскости $\langle A, \mu, \nu \rangle$ можно считать евклидовым, пусть $\nu = (0, r, s)$.

Теорема 5. *Плоскость $\langle A, \mu, \nu \rangle$ пространства-времени Галилея ${}^a\Gamma_1^3$, где вектор μ галилеев, а вектор ν евклидов, описывается параметрическими уравнениями:*

$$x = tu + a, \quad y = (at + p)u + m^2 \frac{(u-1)u}{2} rv + g, \quad z = qu + sv + h.$$

Уравнения плоскости нелинейны. В случае, если оба вектора μ, ν евклидовы, т.е. $m = n = 0$, уравнение плоскости $\langle A, \mu, \nu \rangle$ есть $x = a$. #

Координатные плоскости описываются уравнениями:

$$- \text{плоскость } Oxy = \langle O, \alpha, \beta \rangle: x = u, \quad y = u + \frac{(u-1)u}{2} + v, \quad z = 0;$$

$$- \text{плоскость } Oxz = \langle O, \alpha, \gamma \rangle: x = u, \quad y = v, \quad z = 0;$$

$$- \text{плоскость } Oyz = \langle O, \beta, \gamma \rangle: x = 0, \quad y = u, \quad z = v.$$

Плоскость Oxy является галилеевой ${}^a\Gamma^2$ с нелинейной геометрией; плоскость Oxz обычная галилеева Γ^2 , как все галилеевы плоскости в Γ^3 [1]; плоскость Oyz евклидова.

2 Поверхности пространства ${}^a\Gamma_1^3$

2.1 Определение регулярной поверхности

Отображение δ класса C^3 односвязной области $\mathbf{D}$ галилеевой плоскости Oxz в пространство-время Галилея ${}^a\Gamma_1^3$ называется поверхностью в ${}^a\Gamma_1^3$. Пусть $H(t, u)$ – точка области $\mathbf{D}$, область $\mathbf{D}$ считаем прямоугольной, $a < t < b$, $c < u < d$, параметр t является временным; возможно, что $\mathbf{D}$ совпадает с плоскостью $\Gamma^2 = Oxz$.

В отображении δ точке $H(t, u)$ области $\mathbf{D}$ соответствует точка $M(x, y, z)$ пространства ${}^a\Gamma_1^3$, поверхность описывается галилеевой векторной функцией

$$\delta = \delta(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u)), \quad (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2,$$

функции $x(t, u)$, $y(t, u)$, $z(t, u)$ являются функциями класса C^3 .

Теорема 6. Если $x(t, u) \neq \text{const}$, то поверхность δ описывается галилеевой векторной функцией вида

$$\delta = \delta(t, u) = (t, x(t, u), y(t, u)), \quad (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2, \quad (5)$$

векторы производных функции (5) таковы:

$$\delta_t = \left(1, x_t(t, u) + \frac{1}{2} + t, y_t(t, u) \right), \quad (6)$$

$$\delta_u = (0, x_u(t, u), y_u(t, u)); \quad (7)$$

они неколлинеарны: вектор δ_t – единичный галилеев, вектор δ_u евклидов.

Так как $x(t, u)$ – функция класса C^3 , то она обратима по каждому из параметров. Имеем обратную функцию $t = t(x, u)$, и векторная функция $(x(t, u), y(t, u), z(t, u))$ может быть представлена в другой параметризации:

$$\delta(t, u) = (t, y(t, x), z(t, x)), \quad (t, x) \in \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{R}^2.$$

Изменим обозначения в этой параметризации и функцию $\delta(t, u)$ запишем в виде (5). Частные производные функции (5) отыскиваются согласно теореме 2, п. 1.1. По определению нормы (3) галилеева вектора имеем $|\delta_t| = 1$. #

Параметризация (5) поверхности δ пространства-времени Галилея ${}^a\Gamma_1^3$ называется естественной. Поверхность (5) является регулярной класса C^3 (функции $x(t, u)$, $y(t, u)$ имеют класс C^3 , частные производные δ_t , δ_u неколлинеарны), всякая точка поверхности – обыкновенная. Поверхность (5) обладает галилеевыми касательными векторами δ_t . Поверхности вида

$$\delta(t, u) = (C, x(t, u), y(t, u))$$

совпадают с евклидовой плоскостью $x = C$ пространства-времени Галилея ${}^a\Gamma_1^3$ или являются ее частью и не рассматриваются.

Через всякую точку $P(t_0, u_0)$ поверхности (5) проходит единственная t -линия

$$\delta(t, u_0) = (t, x(t, u_0), y(t, u_0)),$$

и единственная u -линия

$$\delta(t_0, u) = (t_0, y(t_0, u), z(t_0, u)),$$

последняя лежит в евклидовой плоскости пространства ${}^a\Gamma_1^3$, проходящей через точку P ; t -линии поверхности (5) имеют галилеевы касательные векторы (6), u -линии имеют евклидовы касательные векторы (7). В точке $H(t_0, u_0)$ области **D** определения поверхности (5) можно задать направление $q = \frac{du}{dt}$ линией $u = u(t)$, проходящей через точку H , удовлетворяющую условию $q = \frac{du}{dt} \Big|_{t=t_0}$. В выбранном направлении q на поверхности (5) имеется линия

$$\delta(t, u(t)) = (t, x(t, u(t)), y(t, u(t))). \quad (8)$$

Теорема 7. Во всякой точке $P(t_0, u_0) = (t_0, x(t_0, u_0), y(t_0, u_0))$ поверхности $\delta(t, u)$ (5) в естественной параметризации существует галилеева касательная плоскость $\langle P, \delta_t, \delta_u \rangle$, уравнения которой:

$$x = t + t_0, \quad y = \left(x_t + \frac{1}{2} \right) t + \frac{(t-1)t}{2} x_u u + x(t_0, u_0), \quad z = y_t t + y_u u + y(t_0, u_0).$$

Находим производную $\dot{\delta} = \frac{d}{dt} \delta(t, u(t))$ функции (8):

$$\dot{\delta} = \left(1, x_t + \frac{1}{2} + t + x_u \frac{du}{dt}, y_t + y_u \frac{du}{dt} \right),$$

см. теорему 2 и утверждение (в) свойства 2. Сумма векторов

$$\delta_t = \left(1, x_t + \frac{1}{2} + t \right) \text{ и } \frac{du}{dt} \delta_u = \left(0, x_u \frac{du}{dt}, y_u \frac{du}{dt} \right),$$

на основании (1) равна

$$\delta_t + \frac{du}{dt} \delta_u = \dot{\delta},$$

т.е. вектор касательной $\dot{\delta}$ к линии $\delta(t, u(t))$ на поверхности $\delta(t, u)$ является линейной комбинацией векторов касательных к t -линии и u -линии поверхности в каждой точке поверхности. По теореме 5 записываются уравнения плоскости $\langle P, \delta_t, \delta_u \rangle$. #

2.2 Кривизна кривой

В пространстве-времени ${}^a \Gamma_1^3$ по аналогии с пространством Γ^3 [1] рассматриваем кривую в естественной параметризации

$$\delta(t) = (t, x(t), y(t)), \quad t \in I \subseteq \mathbf{R}. \quad (9)$$

По свойству 2 производные функции $\delta(t)$ таковы:

$$\dot{\delta} = \left(1, \dot{x} + \frac{1}{2} - t, \dot{y} \right), \quad \ddot{\delta} = (0, \ddot{x} - 1, \ddot{y}).$$

Вектор $\dot{\delta}$ галилеев, вектор $\ddot{\delta}$ евклидов, они взаимно перпендикулярны и вектор $\ddot{\delta}$ является вектором главной нормали кривой (9). Единичный вектор $\vec{n}$ главной нормали определяется равенством

$$\ddot{\delta} = |\ddot{\delta}| \vec{n}. \quad (10)$$

Величина $|\ddot{\delta}|$ называется кривизной кривой (9) и обозначается k .

2.3 Нормальная кривизна поверхности

Со всякой точкой $P(t_0, u_0)$ поверхности (5)

$$\delta = \delta(t, u) = (t, x(t, u), y(t, u)), \quad (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2,$$

связан репер $\mathbf{B}_P = (P, \delta_t, \delta_u, \vec{n})$, векторы касательных δ_t (6) и δ_u (7) вычислены в точке P , вектор $\vec{n}$ есть единичный вектор евклидовой плоскости $\langle P, \beta, \gamma \rangle$, перпендикулярный евклидову вектору δ_u . Его координаты определяются в результате дифференцирования евклидова вектора $\frac{\delta_u}{|\delta_u|}$ по параметру u [1, с. 59–60]:

$$\vec{n} = \left(0, -\frac{y_u}{|\delta_u|}, \frac{x_u}{|\delta_u|} \right). \quad (11)$$

Как евклидов вектор, $\vec{n}$ перпендикулярен галилееву вектору касательной δ_t поверхности. Таким образом, $\mathbf{B}_P$ является ортогональным репером,

связанным с точкой P поверхности (5) в естественной параметризации. С изменением параметров точка P движется по поверхности, $\mathbf{B}_P$ – подвижный репер поверхности (5).

Теорема 8. Первая квадратичная форма поверхности (5) в естественной параметризации пространства-времени Галилея ${}^a\Gamma_1^3$ задается равенствами

$$ds^2 = \begin{cases} dt^2, & \text{если } t \text{ изменяется;} \\ x_u^2 + y_u^2, & \text{если } t = \text{const.} \end{cases} \quad (12)$$

Малая дуга произвольной линии (8) на поверхности (5) есть $d\delta$. Во всех направлениях на поверхности, кроме направления u -линии, длина этой дуги равна dt , в направлении u -линии длина дуги равна $d\delta = \sqrt{\delta u^2} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2} du$. Согласно галилеевой норме (3) в ${}^a\Gamma_1^3$ на поверхности (5) определяется метрика равенствами (12).

Обозначим:

$$E = E(t, u) = \delta_u^2 = x_u^2 + y_u^2, \quad (13)$$

это единственный ненулевой и неединичный коэффициент первой квадратичной формы поверхности. Первая квадратичная форма поверхности (5) записывается в виде

$$ds^2 = \begin{cases} dt^2, & \text{если } t \text{ изменяется;} \\ x_u^2 + y_u^2, & \text{если } t \text{ не изменяется.} \end{cases}$$

Функция (13) называется метрической функцией поверхности (5). На основе (13) единичный вектор нормали (11) поверхности (5) записывается в виде

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{E}}(0, -y_u, x_u). \quad (14)$$

Нормальной кривизной линии (8) на поверхности (5) называется

$$k_n = \ddot{\delta} \vec{n},$$

где $\ddot{\delta}$ – производная второго порядка функции (8) по временному параметру t , $\vec{n}$ – нормаль поверхности (5), для сравнения см. (10). Величина k_n также называется нормальной кривизной поверхности (5) пространства-времени Галилея ${}^a\Gamma_1^3$.

Теорема 9. Нормальная кривизна поверхности (5) есть функция направления $q = \frac{du}{dt}$ на поверхности (5):

$$k_n = Aq^2 + 2Bq + C, \quad (15)$$

коэффициенты этой функции равны

$$A = \delta_{uu} \vec{n}, \quad B = \delta t \vec{n}, \quad C = \delta_{tt} \vec{n} \quad (16)$$

и вычисляются по формулам

$$A = \frac{1}{\sqrt{E}}(-x_{uu}y_u + y_{uu}x_u),$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{E}}(-x_{ut}y_u + y_{ut}x_u), C = \frac{1}{\sqrt{E}}(-x_{tt}y_u + y_{tt}x_u - y_u); \quad (17)$$

причем $A=0$ только в случае, если u -линии поверхности (5) являются прямыми, если u является естественным параметром u -линии, то A есть кривизна u -линии; C есть кривизна t -линии поверхности (5), см. (10).

Используя теорему 2 и свойство 1, находим полные производные функции (8):

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt} = \left(1, \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2} - t + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt}, \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} \right),$$

$$\ddot{\delta} = \frac{d^2\delta}{dt^2} = \left(0, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 1 + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial t} \frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial t} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right).$$

Вектор $\ddot{\delta}$ евклидов, поэтому имеем разложение

$$\ddot{\delta} = \delta_{tt} + 2\delta_{tu} \frac{du}{dt} + \delta_u \frac{d^2u}{dt^2} + \delta_{uu} \left(\frac{du}{dt} \right)^2,$$

где вектор δ_u есть (7) и

$$\delta_{tt} = \left(0, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 1, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right), \delta_{tu} = \left(0, \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u} \right), \delta_{uu} = \left(0, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right).$$

Для получения нормальной кривизны поверхности находим евклидово скалярное произведение евклидовых векторов $\ddot{\delta}$ и $\vec{n}$, учитывая $\delta_u \vec{n} = 0$:

$$k_n = \ddot{\delta} \vec{n} = \delta_{uu} \vec{n} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \delta_{tu} \vec{n} \frac{du}{dt} + \delta_{tt} \vec{n}.$$

Вводим обозначения (16) и получаем нормальную кривизну поверхности (5) в виде (15). На основе (14) приходим к формулам (17). #

Теорема 10. Вторая квадратичная форма поверхности (5) такова:

$$\Pi = Adu^2 + 2Bdu dt + Cdt^2, \quad (18)$$

ее коэффициенты определяются равенствами (16) и имеют значения (15).

При изменяющемся временном параметре t нормальную кривизну (15) поверхности (5) записываем в виде

$$\frac{Adu^2 + 2Bdudt + Cdt^2}{dt^2},$$

а если t не изменяется, т.е. в направлении u -линии поверхности (5), то нормальная кривизна k_n поверхности (5) не существует. #

Числитель полученной дроби называется второй квадратичной формой поверхности (5), которая записана в (18).

Нормальная кривизна поверхности (5) пространства-времени Галилея ${}^a\Gamma_1^3$ и ее первая и вторая квадратичные формы точно такие же, как для поверхностей во всех известных галилеевых пространствах [1]. Поэтому свойства поверхности (5), зависящие от нормальной кривизны k_n и квадратичных форм, такие же, как во всех галилеевых пространствах. Квадратный трехчлен (15) нормальной кривизны поверхности может иметь от 0 до 2 корней или все его коэффициенты равны нулю: $A = B = C = 0$. Следовательно, поверхность может иметь соответственно от 0 до 2 асимптотических направлений или всякое направление на поверхности является асимптотическим. В связи с этим обыкновенная точка поверхности может быть эллиптической, параболической, гиперболической или точкой уплощения.

3 Полная и средняя кривизны поверхности

3.1 Определение полной и средней кривизн

На поверхности выделяются два направления – направление u -линии, которому не соответствует никакое значение величины q , и экстремальное направление k_3 нормальной кривизны.

Лемма 5. Производные единичного вектора нормали поверхности (5) коллинеарны вектору δ_u касательной к u -линии поверхности:

$$\vec{n}_t = -\frac{B}{E}\delta_u, \quad \vec{n}_u = -\frac{A}{E}\delta_u. \quad (19)$$

Продифференцируем скалярное произведение евклидовых векторов $\delta_u \vec{n} = 0$:

$$\delta_{uu}\vec{n} + \delta_u\vec{n}_t = 0, \quad \delta_{uu}\vec{n} + \delta_u\vec{n}_u = 0.$$

Первые слагаемые правых частей полученных равенств являются коэффициентами (16) второй квадратичной формы (18) поверхности (5): $B + \delta_{uu}\vec{n}_t = 0$, $A + \delta_{uu}\vec{n}_u = 0$; откуда

$$\delta_u\vec{n}_t = -B, \quad \delta_u\vec{n}_u = -A.$$

Запишем разложения векторов $\vec{n}_t, \vec{n}_u$ по векторам ортогонального подвижного репера $\mathbf{B}_P$, п. 2.3, поверхности (5):

$$\vec{n}_t = B_1^1\delta_t + B_1^2\delta_u + C_1\vec{n}, \quad \vec{n}_u = B_2^1\delta_t + B_2^2\delta_u + C_2\vec{n}.$$

Так как все рассматриваемые векторы, кроме δ_t , евклидовы, вектор δ_t галилеев, то $B_1^1 = B_2^1 = 0$, таким образом, имеем

$$\vec{n}_t = B_1^2 \delta_u + C_1 \vec{n}, \quad \vec{n}_u = B_2^2 \delta_u + C_2 \vec{n}.$$

Векторы $\vec{n}_t, \vec{n}_u$, как производные единичного евклидова вектора $\vec{n}$, перпендикулярны вектору $\vec{n}$, вектор $\vec{n}$ перпендикулярен вектору δ_u . Умножим последние равенства скалярно на вектор δ_u :

$$\delta_u \vec{n}_t = B_1^2 \delta_u^2, \quad \delta_u \vec{n}_u = B_2^2 \delta_u^2,$$

здесь $\delta_u \vec{n} = 0$, $\delta_u^2 = E$, см. (13). Теперь получаем (19). #

Установленная лемма соответствует теореме Родрига евклидовой геометрии [5, с. 97], согласно которой векторы $\vec{n}_t, \vec{n}_u$ коллинеарны главным направлениям на поверхности. Поэтому можно считать, что направление u -линии поверхности является ее главным направлением. На направлении u -линии параметр t не изменяется, поэтому в направлении u -линии $k_n = A$. В качестве второго главного направления на поверхности возьмем направление экстремальной кривизны.

Лемма 6. *Экстремальное направление на поверхности есть*

$$q_3 = \frac{-B}{A},$$

экстремальное значение нормальной кривизны поверхности (5) равно

$$k_3 = \frac{AC - B^2}{A}. \quad (20)$$

Функцию нормальной кривизны $k_n = f(q)$ (15) поверхности продифференцируем по q и экстремальное направление на поверхности найдем из условия

$$f'(q) = 0.$$

Имеем $f'(q) = 2Aq + 2B = 0$, откуда находим $q_3 = \frac{-B}{A}$. В этом направлении экстремальная нормальная кривизна поверхности есть (20). #

Произведение значений нормальных кривизн в указанных направлениях называется полной кривизной поверхности, а их сумма называется средней кривизной поверхности.

Теорема 11. *Полная и средняя кривизны поверхности пространства-времени Галилея ${}^a\Gamma_1^3$ вычисляются по формулам*

$$K = AC - B^2, \quad H = \frac{A^a + AC - B^2}{A}. \quad (21)$$

Согласно определению $K = Ak_3$, $H = A + k_3$ подставляем k_3 из (20).

3.2 Примеры

Вычислим полную кривизну некоторых поверхностей пространства-времени Галилея ${}^a\Gamma_1^3$ с нелинейной геометрией.

1. Естественная параметризация плоскости, согласно теореме 3, такова:

$$\delta(t, u) = \left(t, pt + \frac{t^2}{2} - t + 2u + g, at + su + h \right).$$

Производные функции $\delta(t, u)$ равны

$$\delta_t = \left(1, p + t - 1 + \frac{1}{2} - t, q \right) = \left(1, p - \frac{1}{2}, 0 \right), \quad \delta_u = (0, r, s),$$

$$\delta_{tt} = (0, 0, 0), \quad \delta_{tu} = (0, 0, 0), \quad \delta_{uu} = (0, 0, 0).$$

По (16) и (21) $k_n = 0$ и $K = 0$.

2. Параболические цилиндры описываются векторными функциями:

$$\delta(t, u) = \left(t, u, \frac{a}{2}t^2 \right); \quad \delta(t, u) = \left(t, \frac{a}{2}t^2, u \right); \quad a \neq 0.$$

В первом случае имеем производные:

$$\delta_t = \left(1, \frac{1}{2} - t, at \right), \quad \delta_u = (0, 1, 0), \quad \vec{n} = (0, 0, 1),$$

$$\delta_{tt} = (0, -1, a), \quad \delta_{tu} = (0, 0, 0), \quad \delta_{uu} = (0, 0, 0).$$

По (13) $E = 1$, по (19) $A = 0, B = 0, C = a$; и по (15) $k_n = a$, по (21) $K = 0$.

Во втором случае:

$$\delta_t = \left(1, at + \frac{1}{2} - t, 0 \right), \quad \delta_u = (0, 0, 1), \quad \vec{n} = (0, 1, 0),$$

$$\delta_{tt} = (0, a - 1, 0), \quad \delta_{tu} = (0, 0, 0), \quad \delta_{uu} = (0, 0, 0).$$

По (13) $E = 1$, по (19) $A = 0, B = 0, C = a - 1$; по (15) $k_n = a - 1$, но при $a = 1$ $k_n = 0$; по (21) $K = 0$.

3. Параболоиды могут быть заданы функцией

$$\delta(t, u) = \left(t, u, \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{2}u^2 \right).$$

При $ab > 0$ функция задает эллиптический параболоид, при $ab < 0$ – гиперболический параболоид. Имеем:

$$\delta_t = \left(1, \frac{1}{2} - t, at \right), \quad \delta_u = (0, 1, bu), \quad E = 1 + b^2u^2, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2u^2}}(0, -bu, 1),$$

$$\delta_{tt} = (0, -1, a), \quad \delta_{tu} = (0, 0, 0), \quad \delta_{uu} = (0, 0, b).$$

$$\text{По (19) } A = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2u^2}}, B = 0, C = \frac{a + bu}{\sqrt{1 + b^2u^2}}; \text{ по (21) } K = \frac{ab + b^2u}{\sqrt{1 + b^2u^2}}.$$

4. Параболоид вращения

$$\delta(t, u) = (t, t^2 \cos u, t^2 \sin u).$$

Производные:

$$\delta_t = \left(1, 2t \cos u + \frac{1}{2} - t, 2t \sin u \right), \quad \delta_u = (0, -t^2 \sin u, t^2 \cos u), \quad E = t^4,$$

$$\vec{n} = (0, -\cos u, -\sin u), \quad \delta_{tt} = (0, 2 \cos u - 1, 2 \sin u),$$

$$\delta_{tu} = (0, -2t \sin u, 2t \cos u), \quad \delta_{uu} = (0, -t^2 \cos u, -t^2 \sin u).$$

$$A = t^2, \quad B = 0, \quad C = \frac{-2 + \cos u}{t^2}; \quad \text{по (21)} \quad K = -2 + \cos u.$$

5. Полусфера

$$\delta(t, u) = \left(t, \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \cos u, \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \sin u \right);$$

$$\delta_t = \left(1, \frac{-t}{R\sqrt{R^2 - t^2}} \cos u + \frac{1}{2} - t, \frac{-t}{R\sqrt{R^2 - t^2}} \sin u \right),$$

$$\delta_u = \left(0, -\frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \sin u, \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \cos u \right), \quad E = \frac{R^2 - t^2}{R^2}, \quad \vec{n} = (0, -\cos u, -\sin u),$$

$$\delta_{tt} = \left(0, \frac{R^2 - 2t^2}{R(\sqrt{R^2 - t^2})^3} \cos u - 1, \frac{R^2 - 2t^2}{R(\sqrt{R^2 - t^2})^3} \sin u \right),$$

$$\delta_{tu} = \left(0, \frac{t}{R\sqrt{R^2 - t^2}} \sin u, \frac{-t}{R\sqrt{R^2 - t^2}} \cos u \right),$$

$$\delta_{uu} = \left(0, -\frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \cos u, -\frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{R} \sin u \right).$$

$$\text{По (19)} \quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = \frac{R^2 - 2t^2}{R(\sqrt{R^2 - t^2})^3} + \cos u; \quad \text{по (21)}$$

$$K = \frac{R^2 - 2t^2}{R(\sqrt{R^2 - t^2})^3} + \cos u.$$

6. Геликоид есть поверхность

$$\delta(t, u) = (t, u \cos mt, u \sin mt).$$

$$\delta_t = \left(1, mu \sin mt + \frac{1}{2} - t, mu \cos mt \right), \quad \delta_u = (0, \cos mt, \sin mt), \quad E = 1,$$

$$\vec{n} = (0, -\sin mt, \cos mt), \quad \delta_{tt} = (0, -m^2 u \cos mt - 1, -m^2 u \sin mt),$$

$$\delta_{tu} = (0, -m \sin mt, m \cos mt), \quad \delta_{uu} = (0, 0, 0).$$

$$A = 0, B = m, C = \sin mt; \quad K = -m^2.$$

Полная кривизна галилеевой плоскости постоянна и равна нулю. Всякая точка плоскости является точкой уплощения. Параболические цилиндры имеют постоянную нулевую кривизну; при $a \neq 1$ на поверхностях в каждой точке существует единственное асимптотическое направление – евклидово, направление t -линии не асимптотическое. При $a = 1$ направление t -линии асимптотическое и всякая точка параболического цилиндра есть точка уплощения, т.к. t -линия в этом случае является прямой линией, ее кривизна равна нулю, см. п. 2.2. Параболоиды имеют изменяющуюся ненулевую кривизну, хотя некоторые *параболы* обладают нулевой кривизной, как отмечено в предыдущем предложении. Полная кривизна сферы непостоянна в пространстве-времени Галилея, а в евклидовой геометрии постоянна. Геликоиды имеют постоянную отрицательную полную кривизну, ее величина может быть любой заданной.

Список литературы

1. Долгарев, А. И. Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.
2. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
3. Долгарев, И. А. Альтернативное 2-мерное действительное линейное пространство. Группа Ли базисов пространства / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // Владикавказский математический журнал. – 2007. – Т. 9. – Вып. 4. – С. 4–14.
4. Долгарев, И. А. Альтернативная аффинная плоскость / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // Владикавказский математический журнал. – 2008. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 9–20.
5. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.

Долгарев Иван Артурович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования
Пензенский государственный
университет

Dolgarev Ivan Arturovich

PhD in Mathematics, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

E-mail: delivar@yandex.ru

УДК 514.7

Долгарев, И. А.

Поверхности в коммутативной нелинейной геометрии 3-мерного пространства-времени Галилея / И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 69–86.